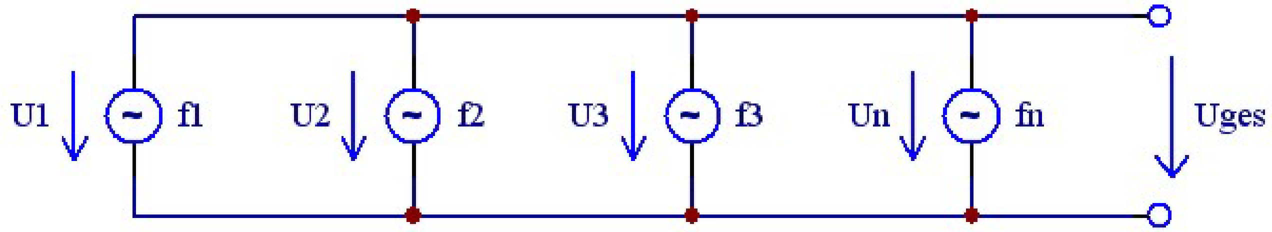
Inhaltsverzeichnis:

Definitionen zur Fourier-Analyse:



Periodische, nichtsinusförmige Schwingungen lassen sich mit Hilfe der Fourier-Anlayse wie folgt beschreiben:

Durch Überlagerung der Grundfrequenz f_1 mit den Frequenzen f_2 bis f_n, den sogennanten Oberwellen, erhält man am Ausgang die gewünschte Signalform.(z.B. Dreieck, Sägezahn)

Dabei gilt, das die überlagerten Frequenzen f_2 bis f_n nur ganzzahlige Vielfache der Grundschwingung f_1 sein dürfen.

$\boxed{f_k = k \bullet f_1}$ $\boxed{k = \frac{f_1}{f_k}}$ $\boxed{f_1 = \frac{f_k}{k}}$ $\boxed{T_k = \frac{T_1}{k}}$ $\boxed{k = \frac{T_1}{T_k}}$ $\boxed{T_1 = k \bullet T_k}$

f_1 = Frequenz der Grundschwingung in Hz
f_k = Frequenz der überlagerten Schwingung in Hz
k = ganzzahliger Faktor (z.B. 1 , 2 ,3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9)
T_1 = Periodendauer der Grundschwingung in s
T_k = Periodendauer der überlagerten Schwingung in s

Die Ausgangsspannung hat die gleiche Frequenz und somit die gleiche Periodendauer wie die Grundschwingung.

$\boxed{f_{Uges} = f_1}$ $\boxed{T_{Uges} = T_1}$

f_{Uges} = Frequenz der Ausgangsspannung in Hz
f_1 = Frequenz der Grundschwingung in Hz
T_{Uges} = Periodendauer des überlagerten Schwingung in s
T_1 = Periodendauer der Grundschwingung in s

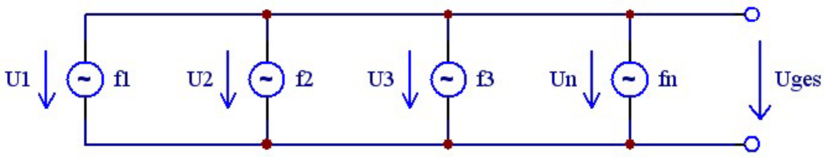
Die Grundschwingung ist der größte gemeinsame Teiler der Teilschwingungen

Diese und die folgenden Gesetzmäßigkeiten lassen sich natürlich auch analog auf den Strom I anwenden oder allgemein ausdrücken.

k=1	Grundschwingung	1. Teilschwingung	1. Harmonische
k=2	1. Oberwelle	2. Teilschwingung	2. Harmonische
k=3	2. Oberwelle	3. Teilschwingung	3. Harmonische
k=4	3. Oberwelle	4. Teilschwingung	4. Harmonische
k=5	4. Oberwelle	5. Teilschwingung	5. Harmonische
k=6	5. Oberwelle	6. Teilschwingung	6. Harmonische
k=7	6. Oberwelle	7. Teilschwingung	7. Harmonische
k=8	7. Oberwelle	8. Teilschwingung	8. Harmonische
k=9	8. Oberwelle	9. Teilschwingung	9. Harmonische
k=10	9. Oberwelle	10 Teilschwingung	10 Harmonische

Amplituden und Phasenlage der Teilschwingungen:

Es gilt für die Teilspannungen:



$$\boxed{u_k = \hat{u}_k \bullet \cos[(k \bullet \omega_1 \bullet t) + \varphi_k]}$$

RAD einstellen !!!!

Die Gesamtspannung ergibt sich aus der Summe der Teilspannungen:

$$u_{ges} = u_0 + \sum_{k=1}^{k} \hat{u}_k \bullet \cos[(k \bullet \omega_1 \bullet t) + \varphi_k] \quad \text{mit} \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \bullet \cos\beta - \sin\alpha \bullet \sin\beta$$

$$\Rightarrow \boxed{u_{ges} = u_0 + \sum_{k=1}^{k} [\hat{u}_k \bullet \cos(\varphi_k) \bullet \cos(k \bullet \omega_1 \bullet t)] - [\hat{u}_k \bullet \sin(\varphi_k) \bullet \sin(k \bullet \omega_1 \bullet t)]}$$

u_{ges} = Ausgangsspannung in V
u_0 = Gleichspannungsanteil in V
k = ganzzahliger Faktor der Teilspannung
$\hat{u}_k$ = Amplitude der Teilschwingung in V
ω_1 = Kreisfrequenz der Grundschwingung in $\frac{1}{s}$
φ_k = (Null)Phasenwinkel der Teilschwingung in °
t = Zeitpunkt in s

Fourierkoeffizienten:

Wenn nun die zeit-unabhängigen Faktoren der Gesamtgleichung zusammengefasst werden, erhält man die sogenannten Fourierkoeffizienten:

$$\boxed{u_{ak} = \hat{u}_k \bullet \cos(\varphi_k)} \qquad \boxed{u_{bk} = -\hat{u}_k \bullet \sin(\varphi_k)}$$

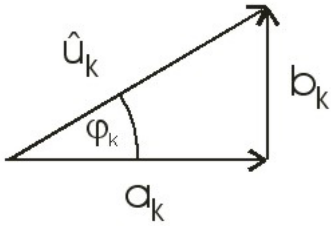
oder allgemein:

$$\boxed{a_k = \hat{y}_k \bullet \cos(\varphi_k)} \quad \boxed{b_k = -\hat{y}_k \bullet \sin(\varphi_k)} \quad \boxed{\hat{y}_k = \sqrt{{a_k}^2 + {b_k}^2}} \quad \boxed{\varphi_k = -\arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right)}$$

RAD !!!

Nun sieht die Gleichung des Gesamtsignals folgendermaßen aus:

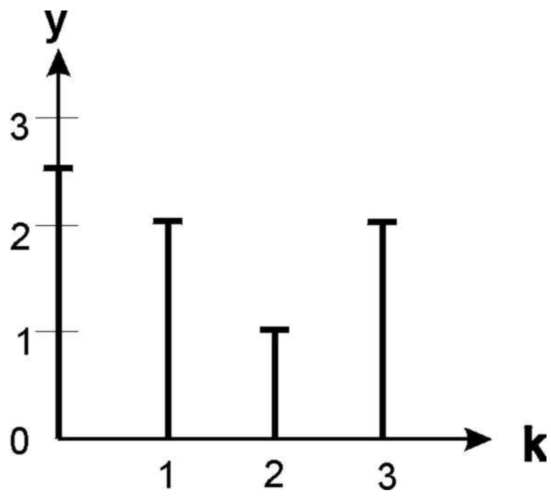
$$\boxed{y_{ges} = y_0 + \sum_{k=1}^{k} [a_k \bullet \cos(k \bullet \omega_1 \bullet t)] + [b_k \bullet \sin(k \bullet \omega_1 \bullet t)]}$$



y_{ges} = Ausgangssignal
y_0 = Gleichanteil, der im Ausgangssignal vorhanden ist
k = ganzzahliger Faktor der Teilschwingung
a_k , b_k = Fourierkoeffizienten der entsprechende Teilschwingung k
ω_1 = Kreisfrequenz der Grundschwingung in $\frac{1}{s}$
φ_k = (Null)Phasenwinkel der Teilschwingung in °
t = Zeitpunkt in s
$\hat{y}_k$ = Amplitude der Teilschwingung

Amplituden- und Phasenspektrum:

Amplitudenspektrum:



Im Amplitudenspektrum werden die Amplituden der einzelnen Teilschwingungen eingetragen.

$$\boxed{\hat{y}_k = \sqrt{{a_k}^2 + {b_k}^2}}$$

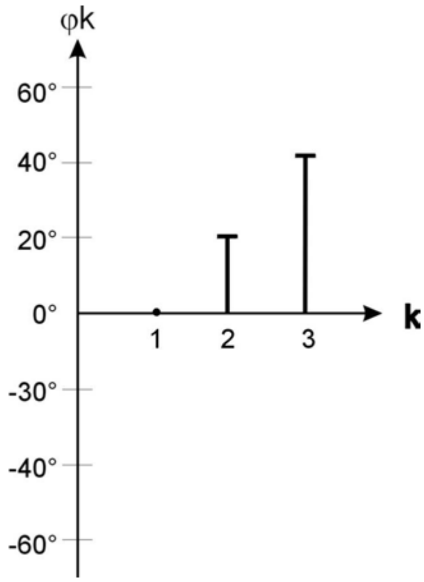
Gleichanteil mit k=0 nicht vergessen !!!!

Es kann möglich sein, das die Amplituden der einzelnen Teilschwingungen (auch der Grundschwingung) zu Null werden.

Da die Grundschwingung der größte gemeinsame Teiler der Teilschwingungen ist kann es vorkommen, das die Amplitude der Grundschwingung Null ist !!

$\hat{y}_k$ = Amplitude der Teilschwingung (immer positiv)
a_k , b_k = Fourierkoeffizienten der entsprechende Teilschwingung k
φ_k = (Null)Phasenwinkel in °

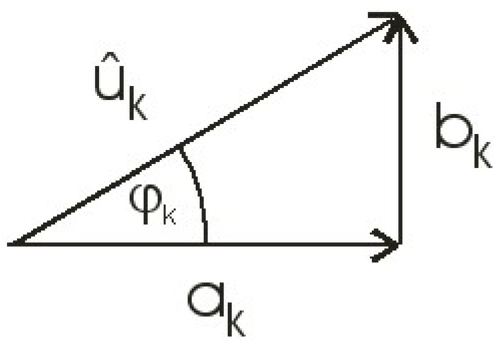
Phasenspektrum:



Im Phasenspektrum werden die (Null)Phasenwinkel der einzelnen Teilschwingungen eingetragen.

$$\boxed{\varphi_k = -\arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right)}$$ RAD !!!

Der Phasenwinkel der Grundschwingung f_1 wird als Bezugsgröße mit $\varphi_1 = 0°$ angenommen.



Berechnung Fourier-Koeffizienten:

$$\boxed{y_0 = \frac{1}{T} \bullet \int_0^T y(t) \bullet dt} \quad \boxed{a_k = \frac{2}{T} \bullet \int_0^T y(t) \bullet \cos(k \bullet \omega_1 \bullet t) \bullet dt} \quad \boxed{b_k = \frac{2}{T} \bullet \int_0^T y(t) \bullet \sin(k \bullet \omega_1 \bullet t) \bullet dt}$$

RAD einstellen !!!!

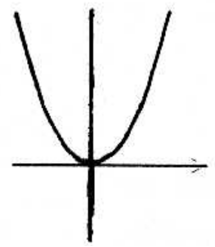
y_0 = Gleichanteil der Schwingung
a_k , b_k = Fourierkoeffizienten der entsprechende Teilschwingung k

Durch folgende besondere Gesetzmäßigkeiten kann der Rechenaufwand reduziert werden:

<u>Gerade Funktionen:</u>
z.B. Parabel

Wenn gilt: $\boxed{f(t) = f(-t)}$

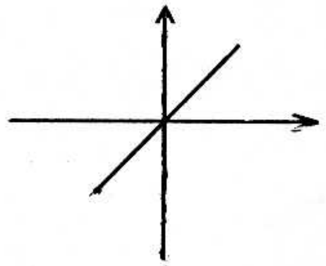
$\Rightarrow$ **$a_k \neq 0$, $b_k = 0$, $y_0 \neq 0$**



<u>Ungerade Funktionen:</u>
z.B. Gerade

Wenn gilt: $\boxed{f(t) = -f(-t)}$

$\Rightarrow$ **$a_k = 0$, $b_k \neq 0$, $y_0 = 0$**

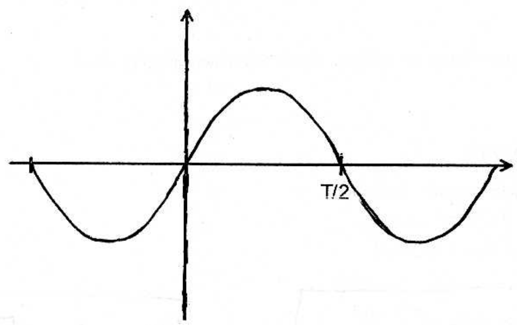


<u>Alternierende Funktionen:</u>
z.B. reine Sinusschwingung

Wenn gilt: $\boxed{y(t) = -y\left(t + \frac{T}{2}\right)}$

$\Rightarrow$ **$a_k \neq 0$, $b_k \neq 0$, $y_0 = 0$,**

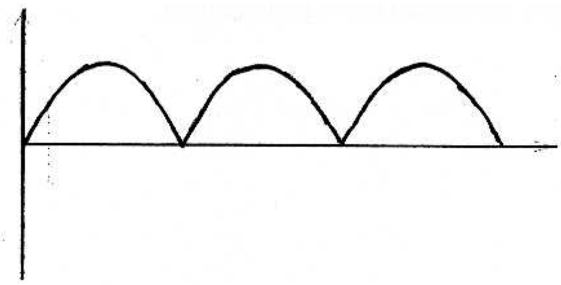
k = 1 , 3 , 5 , 7, 9 ...



<u>Teilschwingungen gerader Ordnung :</u>
Schwingungen die aus Teilen von Sinuskurven bestehen.
z.B. Zweiweg-Gleichrichtung

$\Rightarrow$ **$a_k \neq 0$, $b_k = 0$, $y_0 \neq 0$,**

k = 2 , 4 , 6 , 8, 10 ...

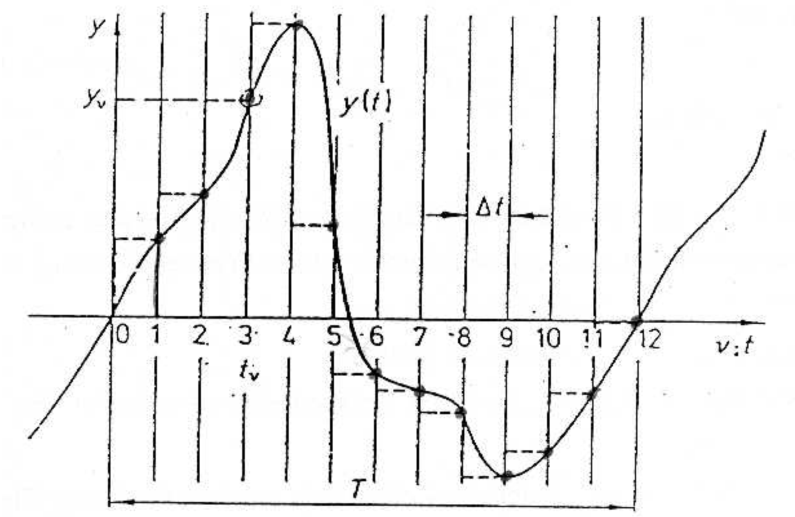


Runge-Verfahren:

Viele periodische Schwingungen können nur schwer mathematisch bestimmt werden.

Zur Bestimmung der Fourier-Koeffizienten dient das mathematische Näherungsverfahren.

Es wird hier als Runge-Verfahren bezeichnet.



Die Funktion y(t) wird dazu in $2 \bullet m$ Zeitabschnitte Δt unterteilt. (Siehe Diagramm)

$\boxed{2 \bullet m}$ sei dabei ein ganzzahliges Vielfaches von 12

Berechnung Gleichanteil des Signals:

$$\boxed{y_0 = \frac{1}{2 \bullet m \bullet \Delta t} \bullet \sum_{\nu=1}^{2 \bullet m} y(\nu)}$$

Berechnung Fourier-Koeffizienten:

$$\boxed{a_k \approx \frac{1}{m} \bullet \sum_{\nu=1}^{2 \bullet m} y(\nu) \bullet \cos\left(\frac{k \bullet \nu \bullet \pi}{m}\right)} \qquad \boxed{b_k \approx \frac{1}{m} \bullet \sum_{\nu=1}^{2 \bullet m} y(\nu) \bullet \sin\left(\frac{k \bullet \nu \bullet \pi}{m}\right)}$$

RAD einstellen !!!

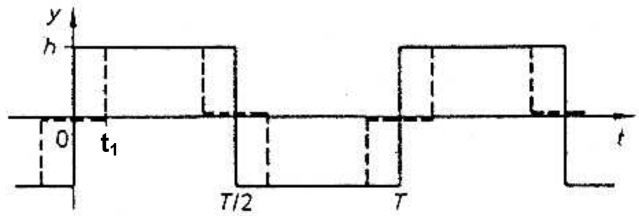
$2 \bullet m$ = 12 bzw. ganzzahliges Vielfaches von 12 z.B. 12, 24, 36
y_0 = Gleichanteil der Schwingung
Δt = Zeitspanne in s
$y(\nu)$ = Funktionswert der jeweiligen Stützstelle (s. Diagramm)
a_k , b_k = Fourierkoeffizienten der entsprechende Teilschwingung k

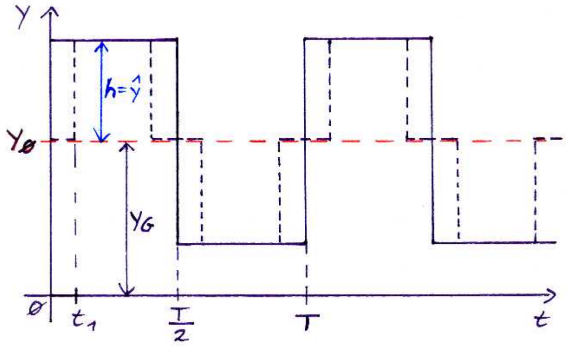
Es sollte noch folgendes beachtet werden:

- Falls y(t) zum Zeitpunkt t_ν eine Sprungstelle hat (z.B. Rechteck), so wird als Funktionswert $y(\nu)$ für das Runge-Verfahren der Mittelwert der beiden Funktionswerte an dieser Stelle verwendet.

- Die Grundschwingung f_1 ergibt sich schon mit wenigen Stützstellen mit brauchbarer Genauigkeit.

Fourierkoeffizienten für Rechtecksignale:





Ohne Anhebung : $\boxed{y_0 = 0}$ Mit Anhebung : $\boxed{y_0 = y_G}$

$\boxed{a_k = 0}$ **k = 1 , 3 , 5 , 7 , 9 , ...**

Ohne Pause: $\boxed{b_k = \frac{4 \bullet h}{\pi \bullet k}}$ Mit Pause (gestrichelt) : $\boxed{b_k = \frac{4 \bullet h}{\pi \bullet k} \bullet \cos(\omega_1 \bullet t_1)}$

$\boxed{y_{ges} = y_0 + \sum_{k=1}^{k} b_k \bullet \sin(k \bullet \omega_1 \bullet t)}$ $\boxed{f_1 = \frac{1}{T}}$ $\boxed{\omega_1 = 2 \bullet \pi \bullet f_1 = \frac{2 \bullet \pi}{T}}$

$\boxed{\hat{y}_k = b_k}$ $\boxed{\varphi_k = -90°}$

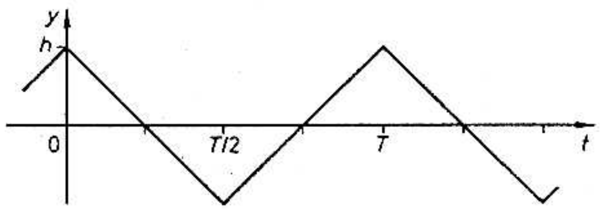
Mit $b_{k\,max} = p \bullet b_1 \Rightarrow \boxed{k_{max} = \frac{100\%}{p}}$ mit k_{max} als nächstkleinerer ganzzahliger Faktor

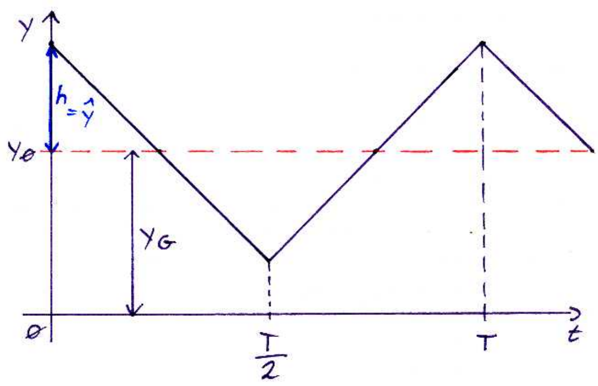
h = Amplitude des Signals ***Vorsicht Vorzeichen bei t=0 !!!***
t_1 = Pausenzeit in s
T= Periodendauer des Signal in s

y_0 = Gleichanteil des Signals
y_G = Anhebung des Signals
a_k , b_k = Fourier-Koeffizienten der Teilschwingung k
k = Faktor der Teilschwingung (1, 3, 5, 7, 9, ...)
y_{ges} = Gesamtsignal zum Zeitpunkt t
f_1 = Frequenz der Grundschwingung in Hz
ω_1 = Kreisfrequenz der Grundschwingung in $\frac{1}{s}$
$\hat{y}_k$ = Amplitude der Teilschwingung k zum Zeitpunkt t
φ_k = (Null)Phasenwinkel der Teilschwingung k

p = **Prozentsatz in %** um den die k-te Teilschwingung kleiner ist als die Grundschwingung
k_{max} = höchste noch zu berechnende Teilschwingung

Fourierkoeffizienten für Dreiecksignale:





Ohne Anhebung : $\boxed{y_0 = 0}$ Mit Anhebung : $\boxed{y_0 = y_G}$

$\boxed{a_k = \frac{8 \bullet h}{\pi^2 \bullet k^2}}$ $\boxed{b_k = 0}$ **k = 1 , 3 , 5 , 7 , 9 , ...**

$\boxed{y_{ges} = y_0 + \sum_{k=1}^{k} a_k \bullet \cos(k \bullet \omega_1 \bullet t)}$ $\boxed{f_1 = \frac{1}{T}}$ $\boxed{\omega_1 = 2 \bullet \pi \bullet f_1 = \frac{2 \bullet \pi}{T}}$

$\boxed{\hat{y}_k = a_k}$ $\boxed{\varphi_k = 0°}$

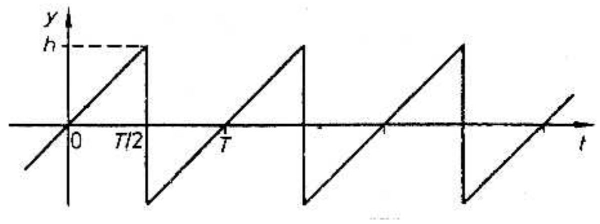
Mit $a_{k\,\max} = p \bullet a_1 \Rightarrow \boxed{k_{\max} = \frac{1}{\sqrt{\frac{p}{100\%}}}}$ mit k_{max} als nächstkleinerer ganzzahliger Faktor

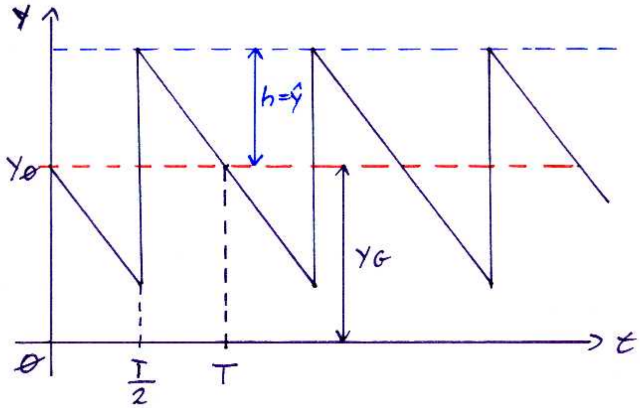
h = Amplitude des Signals ***Vorsicht Vorzeichen bei t=0 !!!***
T= Periodendauer des Signal in s

y_0 = Gleichanteil des Signals
y_G = Anhebung des Signals
a_k , b_k = Fourier-Koeffizienten der Teilschwingung k
k = Faktor der Teilschwingung (1, 3, 5, 7, 9, ...)
y_{ges} = Gesamtsignal zum Zeitpunkt t
f_1 = Frequenz der Grundschwingung in Hz
ω_1 = Kreisfrequenz der Grundschwingung in $\frac{1}{s}$
$\hat{y}_k$ = Amplitude der Teilschwingung k zum Zeitpunkt t
φ_k = (Null)Phasenwinkel der Teilschwingung k

p = **Prozentsatz in %** um den die k-te Teilschwingung kleiner ist als die Grundschwingung
k_{max} = höchste noch zu berechnende Teilschwingung

Fourierkoeffizienten für Sägezahnsignale:





Ohne Anhebung: $\boxed{y_0 = 0}$ Mit Anhebung: $\boxed{y_0 = y_G}$

$\boxed{a_k = 0}$ $\boxed{b_k = \frac{2 \bullet h}{\pi \bullet k} \bullet (-1)^{k+1}}$ **k = 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , ...**

$\boxed{y_{ges} = y_0 + \sum_{k=1}^{k} b_k \bullet \sin(k \bullet \omega_1 \bullet t)}$ $\boxed{f_1 = \frac{1}{T}}$ $\boxed{\omega_1 = 2 \bullet \pi \bullet f_1 = \frac{2 \bullet \pi}{T}}$

$\boxed{\hat{y}_k = b_k}$ $\boxed{\varphi_k = -90°}$

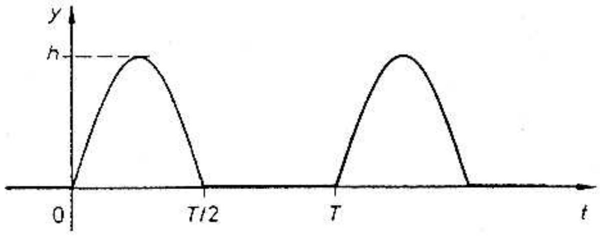
Mit $b_{k\,max} = p \bullet b_1 \Rightarrow \boxed{k_{max} = \frac{100\%}{p}}$ mit k_{max} als nächstkleinerer ganzzahliger Faktor

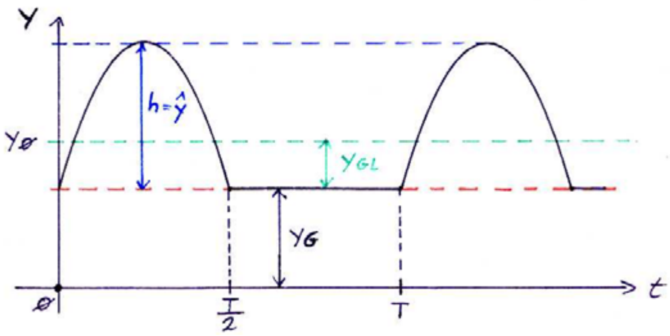
h = Amplitude des Signals ***Vorsicht Vorzeichen bei t=0 !!!***
T= Periodendauer des Signal in s

y_0 = Gleichanteil des Signals
y_G = Anhebung des Signals
a_k , b_k = Fourier-Koeffizienten der Teilschwingung k
k = Faktor der Teilschwingung (1 , 2 , 3 , 4 , 5, ...)
y_{ges} = Gesamtsignal zum Zeitpunkt t
f_1 = Frequenz der Grundschwingung in Hz
ω_1 = Kreisfrequenz der Grundschwingung in $\frac{1}{s}$
$\hat{y}_k$ = Amplitude der Teilschwingung k zum Zeitpunkt t
φ_k = (Null)Phasenwinkel der Teilschwingung k

p = **Prozentsatz in %** um den die k-te Teilschwingung kleiner ist als die Grundschwingung
k_{max} = höchste noch zu berechnende Teilschwingung

Fourierkoeffizienten für Einweg-Gleichrichtungs-Signal:





Ohne Anhebung: $\boxed{y_0 = \frac{h}{\pi}}$ Mit Anhebung: $\boxed{y_0 = y_G + \left(\frac{h}{\pi}\right)}$

$\boxed{a_k = \frac{2 \bullet h}{\pi \bullet \left(1 - k^2\right)}}$ $\boxed{b_1 = \frac{h}{2}}$ **k = 2 , 4 , 6 , 8 , ...**

$\boxed{y_{ges} = y_0 + \sum_{k=1}^{k} a_k \bullet \cos\left(k \bullet \omega_1 \bullet t\right) + b_k \bullet \sin\left(k \bullet \omega_1 \bullet t\right)}$ $\boxed{f_1 = \frac{1}{T}}$ $\boxed{\omega_1 = 2 \bullet \pi \bullet f_1 = \frac{2 \bullet \pi}{T}}$

$\boxed{\hat{y}_k = \sqrt{{a_k}^2 + {b_k}^2}}$ $\boxed{\varphi_k = -\arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right)}$ **RAD !!!**

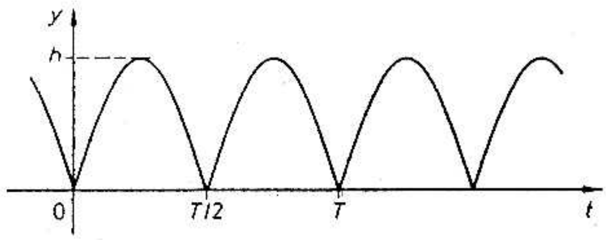
Mit $a_{k\,\max} = p \bullet a_2 \;\Rightarrow\; \boxed{k_{\max} = \sqrt{1 + \frac{3 \bullet 100\%}{p}}}$ mit k_{max} als nächstkleinerer ganzzahliger Faktor

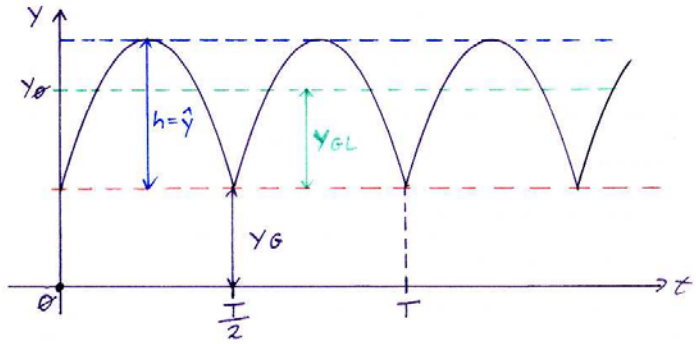
h = Amplitude des Signals ***Vorsicht Vorzeichen bei t=0 !!!***
T= Periodendauer des Signal in s

y_0 = Gleichanteil des Signals
y_G = Anhebung des Signals
a_k , b_k = Fourier-Koeffizienten der Teilschwingung k
k = Faktor der Teilschwingung (2, 4, 6, 8, 10, ...)
y_{ges} = Gesamtsignal zum Zeitpunkt t
f_1 = Frequenz der Grundschwingung in Hz
ω_1 = Kreisfrequenz der Grundschwingung in $\frac{1}{s}$
$\hat{y}_k$ = Amplitude der Teilschwingung k zum Zeitpunkt t
φ_k = (Null)Phasenwinkel der Teilschwingung k

p = **Prozentsatz in %** um den die k-te Teilschwingung kleiner ist als die Grundschwingung
k_{max} = höchste noch zu berechnende Teilschwingung

Fourierkoeffizienten für Zweiweg-Gleichrichtungs-Signal:





Ohne Anhebung: $\boxed{y_0 = \frac{2 \bullet h}{\pi}}$ Mit Anhebung: $\boxed{y_0 = y_G + \left(\frac{2 \bullet h}{\pi}\right)}$

$\boxed{a_k = \frac{4 \bullet h}{\pi \bullet \left(1 - k^2\right)}}$ $\boxed{b_k = 0}$ **k = 2 , 4 , 6 , 8 , ...**

$\boxed{y_{ges} = y_0 + \sum_{k=1}^{k} a_k \bullet \cos\left(k \bullet \omega_1 \bullet t\right)}$ $\boxed{f_1 = \frac{1}{T}}$ $\boxed{\omega_1 = 2 \bullet \pi \bullet f_1 = \frac{2 \bullet \pi}{T}}$

$\boxed{\hat{y}_k = a_k}$ $\boxed{\varphi_k = 0°}$

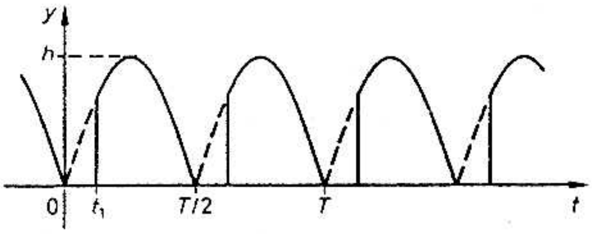
Mit $a_{k\,\max} = p \bullet a_2 \Rightarrow$ $\boxed{k_{\max} = \sqrt{1 + \frac{3 \bullet 100\%}{p}}}$ mit k_{max} als nächstkleinerer ganzzahliger Faktor

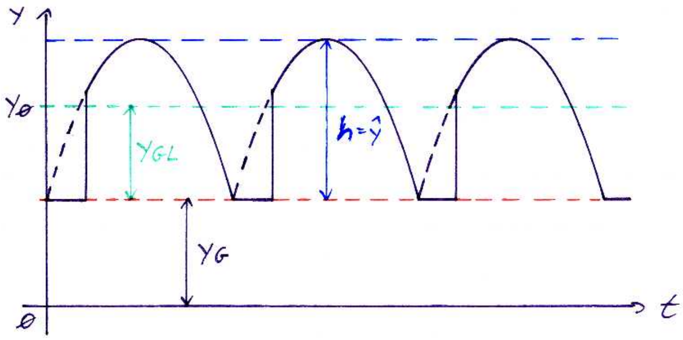
h = Amplitude des Signals ***Vorsicht Vorzeichen bei t=0 !!!***
T= Periodendauer des Signal in s

y_0 = Gleichanteil des Signals
y_G = Anhebung des Signals
a_k , b_k = Fourier-Koeffizienten der Teilschwingung k
k = Faktor der Teilschwingung (2, 4, 6, 8, 10, ...)
y_{ges} = Gesamtsignal zum Zeitpunkt t
f_1 = Frequenz der Grundschwingung in Hz
ω_1 = Kreisfrequenz der Grundschwingung in $\frac{1}{s}$
$\hat{y}_k$ = Amplitude der Teilschwingung k zum Zeitpunkt t
φ_k = (Null)Phasenwinkel der Teilschwingung k

p = **Prozentsatz in %** um den die k-te Teilschwingung kleiner ist als die Grundschwingung
k_{max} = höchste noch zu berechnende Teilschwingung

Fourierkoeffizienten für Phasenanschnitt-Signal:





Zündwinkel: $\boxed{\alpha = \omega_1 \bullet t_1}$

Ohne Anhebung: $\boxed{y_0 = \frac{2 \bullet h}{\pi} \bullet \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ Mit Anhebung: $\boxed{y_0 = y_G + \frac{2 \bullet h}{\pi} \bullet \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

$$\boxed{a_k = \frac{2 \bullet h \bullet (k \bullet \sin\alpha \bullet \sin(k \bullet \alpha) + 1 + \cos\alpha \bullet \cos(k \bullet \alpha))}{\pi \bullet (1 - k^2)}}$$

$$\boxed{b_k = \frac{2 \bullet h \bullet (\cos\alpha \bullet \sin(k \bullet \alpha) - k \bullet \sin\alpha \bullet \cos(k \bullet \alpha))}{\pi \bullet (1 - k^2)}}$$

k = 2 , 4 , 6 , 8 , ...

$\boxed{y_{ges} = y_0 + \sum_{k=1}^{k} a_k \bullet \cos(k \bullet \omega_1 \bullet t)}$ $\boxed{f_1 = \frac{1}{T}}$ $\boxed{\omega_1 = 2 \bullet \pi \bullet f_1 = \frac{2 \bullet \pi}{T}}$

$\boxed{\hat{y}_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}}$ $\boxed{\varphi_k = -\arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right)}$ **RAD !!!**

h = Amplitude des Signals ***Vorsicht Vorzeichen bei t=0 !!!***
T= Periodendauer des Signal in s

y_0 = Gleichanteil des Signals
y_G = Anhebung des Signals
a_k , b_k = Fourier-Koeffizienten der Teilschwingung k
k = Faktor der Teilschwingung (2, 4, 6, 8, 10, ...)
y_{ges} = Gesamtsignal zum Zeitpunkt t
f_1 = Frequenz der Grundschwingung in Hz
ω_1 = Kreisfrequenz der Grundschwingung in $\frac{1}{s}$
$\hat{y}_k$ = Amplitude der Teilschwingung k zum Zeitpunkt t
φ_k = (Null)Phasenwinkel der Teilschwingung k