

Formelsammlung für Elektrische Messtechnik**Inhaltsverzeichnis:**

Thema	Bereiche	Seite
SI-Einheitensystem		1-2
Fehler	Absoluter Fehler	1-3
	Relativer Fehler	1-3
Genauigkeitsklassen	Unterteilung Fein- und Betriebsmessger.	1-3
Empfindlichkeit	von analogen Messgeräten	1-4
	von digitalen Messgeräten	1-4
Auflösung digitaler Messgeräte		1-4
Systematischer Gerätefehler	bei analogen Messgeräten	1-4
	bei digitalen Messgeräten	1-4
Fehlerfortpflanzung additiv	bei Addition	1-5
	bei Subtraktion	1-5
	bei zufälligen Fehlern	1-5
Fehlerfortpflanzung multiplikativ	bei Multiplikation	1-5
	bei Division	1-5
	bei zufälligen Fehlern	1-5
Wahrscheinlichkeitsrechnung	Wahrscheinlichkeit	1-6
	Anzahl von Ereignissen	1-6
Mittelwert einer Messgröße		1-6
Standardabweichung	Berechnung	1-7
Wahrscheinlichkeit mit Normalverteilung (Gauss)	Berechnung	1-8
	Gauss-Tabelle für $p(z)$ bzw. $p(-z)$	1-9
Oszilloskop	Aufbau	1-10
	Empfindlichkeit der Röhre	1-10
	Schaltzeichen	1-11
	Triggerfrequenz	1-11
	Dämpfung am Messeingang bei Messung in AC-Messung	1-11
	Unterer Grenzfrequenz bei AC-Messung	1-12
	Obere Grenzfrequenz	1-12
	Anstiegszeit des Oszilloskops	1-12
	Anstiegszeit des gemessenen Signales	1-12
	Ablenkfaktoren	1-13
	Strommessung mit dem Oszilloskop	1-13
	Messung des Phasenverschiebungswinkel	1-13
	Kondensator	Ladezeit / Ladekonstante
Übertragungsfaktor		1-14

SI-Einheitensystem:

Begriffserklärung: S=System, I=international

Es gibt folgende festgelegte Größen:

- Länge [l] in m (Meter)
1 Meter ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während der Dauer von $\frac{1}{299792458}$ Sekunden durchläuft.
 - Masse [m] in kg (Kilogramm)
1 Kilogramm entspricht genau der Masse des Ur-Kilogrammes das aus einem Platin-Iridium-Zylinder gefertigt ist und in Paris gelagert wird.
 - Zeit [t] in s (Sekunden)
1 Sekunde ist die Zeitdauer von 9 192 631 770 Schwingungen des Cs-Atoms (Cäsium)
 - Lichtstärke [l_v] in Cd (Candela)
1 Cadela ist die Lichtstärke in einer bestimmten Richtung einer Strahlungsquelle. Diese Strahlungsquelle sendet monochromatisches Licht aus mit der Frequenz von $f = 540 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$. Die Strahlstärke beträgt $\frac{1}{683} \text{ Watt}$
 - Stromstärke [I] in A (Ampere)
1 Ampere ist ... siehe Zusatzblatt
 - Temperatur [T] in K (Kelvin)
1 Kelvin ist der 273,16te Teil der Temperatur des Tripelpunktes von Wasser. Der Tripelpunkt von Wasser ist 0 °C weil es dort in allen drei Aggregatzuständen vorkommt.
 - Stoffmenge [k] im mol (Mol)
1 Mol ist ...
-

Absoluter Fehler F:

$$F = A - W$$

A = abgelesener Wert (= Messwert = Ist-Wert)

W = wahrer Wert (=Soll-Wert)

Relativer Fehler f:

1.) bezogen auf den wahren Wert (=Sollwert)

$$f = \frac{F}{W} \cdot 100\% \quad \text{oder} \quad f = \frac{(A - W)}{W} \cdot 100\%$$

2.) bezogen auf den Messwert (=Istwert)

$$f = \frac{F}{A} \cdot 100\% \quad \text{oder} \quad f = \frac{(A - W)}{A} \cdot 100\%$$

3.) bezogen auf den Meßbereichsendwert (vom Endwert = full Scale = Fs)

$$f = \frac{F}{A_{\max}} \cdot 100\%$$

A_{\max} = Maximaler Wert des Meßbereiches

Genauigkeitsklassen (= Fehler in % von Endausschlag)

- Feinmeßgeräte mit den Werten: 0,1 0,2 0,5
- Betriebsmeßgeräte mit den Werten: 1 1,5 2,5 5

Empfindlichkeit E von analogen Messgeräten

$$E = \frac{\Delta I}{\Delta M}$$

ΔI = Änderung der Zeigerstellung auf der Skala

ΔM = Änderung der Meßgröße

Empfindlichkeit (Auflösung) digitaler Meßgeräten

$$\text{Empfindlichkeit} = \frac{\text{Ziffernschritt}}{\text{Meßgrößenänderung}} \Rightarrow E = \frac{\Delta Z}{\Delta M}$$

Auflösung digitaler Messgeräte

$$\text{Auflösung} = \frac{\text{Meßgrößenänderung}}{\text{Maximalanzeige}}$$

Systematischer Gerätefehler:

bei analogen Messgeräten:

= Anzeigefehler aufgrund innerer Mängel des Gerätes

$$Gk = \frac{|F_{G \max}|}{MB} \cdot 100\% \quad F_{G \max} = \frac{\pm MB \cdot Gk}{100}$$

Gk = Genauigkeitsklasse

$F_{G \max}$ = Fehlangabe = maximaler absoluter Fehler

MB = Meßbereichsendwert

bei digitalen Messgeräten:

= Anzeigefehler aufgrund innerer Mängel des Gerätes

$$F_{G \max} = \frac{\text{Genauigkeit} \cdot MB_{\max} + \text{Digits} \cdot \text{Auflösung}}{100\%}$$

$F_{G \max}$ = Fehlangabe = maximaler absoluter Fehler

Genauigkeit = Fehlerangabe aus Datenblatt

MB_{\max} = Maximale Anzeige des Meßbereichs

Digits = Anzahl der Digits bei Fehlerangabe aus dem Datenblatt

Auflösung = Empfindlichkeit E (oder aus Datenblatt)

Fehlerfortpflanzung**1a.) Bei Addition**

Bei der **Addition** von gemessenen Größen **addieren** sich die **absoluten Fehler** (ΔU_n)
Es muss das Vorzeichen mitberücksichtigt werden.

$$U_g = U_{1 \text{ wahr}} + U_{2 \text{ wahr}} + U_{3 \text{ wahr}}$$

$$\Delta U_g = \Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3$$

1b.) Bei Subtraktion

Bei der **Subtraktion** von gemessenen Größen werden **die absoluten Fehler subtrahiert**.

$$I_{g \text{ wahr}} = I_{1 \text{ wahr}} - I_{2 \text{ wahr}} ; \Delta I_g = \Delta I_1 - \Delta I_2$$

1c.) Bei zufälligen Fehlern

⇒ Es wird der **maximale absolute Fehler berechnet**

$$\Delta I_{\max} = \pm (|\Delta I_1| + |\Delta I_2|)$$

2a.) Bei Multiplikation

Bei der **Multiplikation** gemessener Größen (z.B. $P=U \cdot I$) **addieren** sich die **relativen Fehler** der Meßwerte. Es muß auf die Vorzeichen der relativen Fehler geachtet werden.

$$f_{rP} \approx f_{rU} + f_{rI}$$

2b.) Bei Division

Bei der **Division** von gemessenen Größen (z.B. $R = \frac{U}{I}$) **subtrahieren** sich die **relativen Fehler** der Meßwerte. Es muß auf die Vorzeichen der relativen Fehler geachtet werden.

$$f_{rR} \approx f_{rU} - f_{rI}$$

2c.) Bei zufälligen Fehlern

⇒ Es wird der **maximale relative Fehler berechnet**:

$$f_{P \max} \approx \pm (|f_U| + |f_I|)$$

Wahrscheinlichkeitsrechnung – Statistik

Zufällige Fehler werden mit den Mitteln der Wahrscheinlichkeitsrechnung behandelt.

$$\text{Wahrscheinlichkeit } p(E) = \frac{e}{n}$$

n = Anzahl der Möglichkeiten

z.B. Bei Würfel $\Rightarrow n = 6$

e = Anzahl der Ergebnisse aus den Möglichkeiten

z.B. für gewürfelte Zahl 1 $\Rightarrow e=1$, für gewürfelte Zahl 1 oder 2 $\Rightarrow e = 2$

$p(E)$ = Wahrscheinlichkeit für Ergebnis E

z.B. für gewürfelte Zahl 1 oder 2 $\Rightarrow p(\text{1oder2}) = \frac{2}{6} = 0,333 = 33\%$

Es gilt:

$p = 1 \Rightarrow$ Das Ereignis tritt sicher auf.

Je kleiner p wird, desto unwahrscheinlicher tritt das Ereignis auf.

$p \rightarrow \infty \Rightarrow$ Das Ereignis tritt höchstwahrscheinlich nicht auf

$$\text{Anzahl der Ereignisse} = \text{Wahrscheinlichkeit } p(E) \cdot \text{Anzahl der Wiederholungen}$$

für e Elemente aus n verschiedenen Elementen gilt:

$$p(e \text{ aus } n) = \frac{e! \cdot (n-e)!}{n!}$$

Mittelwert einer Meßgröße

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)$$

\bar{x} = Mittelwert der Meßgröße (=Durchschnittswert)

n = Anzahl der Messungen

x_1, x_2, \dots, x_i = Messwerte

Für $n \rightarrow \infty$ gilt:

$$\mu = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$$

μ = Erwartungswert

Berechnung der Standardabweichung:

$$s = \bar{F} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

s=Standardabweichung ; \bar{F} =durchschnittlicher Fehler

Für $n \rightarrow \infty$ gilt:

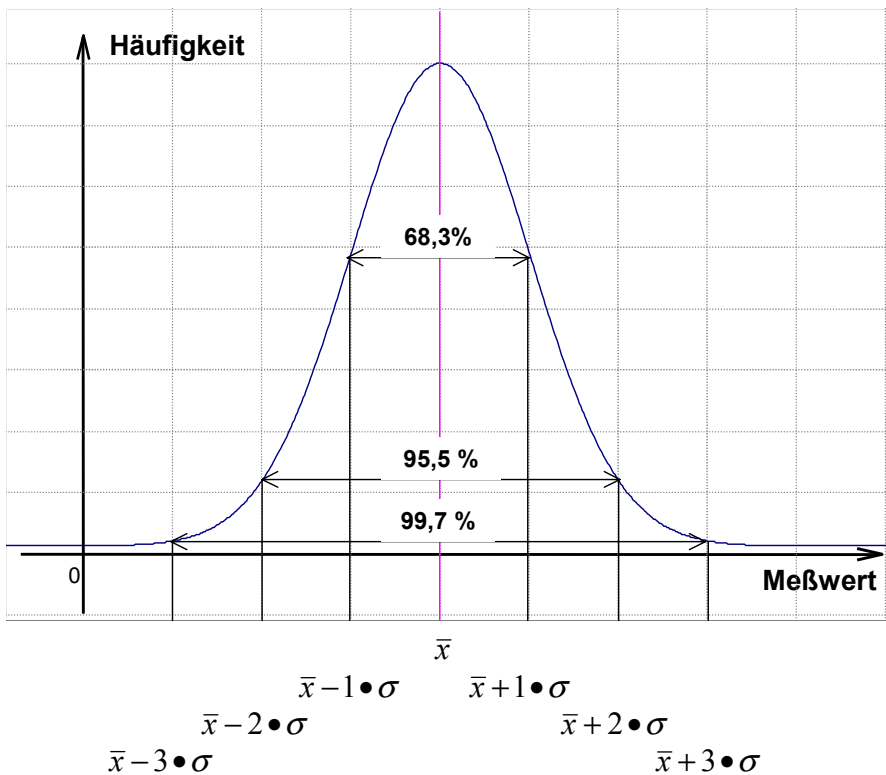
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad \sigma \text{ (Sigma)=Standardabweichung für } n \rightarrow \infty$$

Die Häufigkeitsverteilung heißt für $n \rightarrow \infty$ auch **Gauß-Verteilung** (=Normalverteilung)

Die Standardabweichung s (bzw σ) sind ein Maß für die Zuverlässigkeit der einzelnen Messwerte innerhalb einer Messung.
 Sie gibt an, wie weit sich ein einzelner Meßwert durchschnittlich vom Mittelwert entfernt.
 (entspricht Güte bzw. Zuverlässigkeit der Messwerte)

Mathematische Beschreibung der Kurvenform:

Häufigkeit
$$h(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\left[-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma} \right)^2 \right]}$$



Berechnung der Wahrscheinlichkeit $p(z)$ bzw. $p(-z)$ mit Hilfe des Verteilungsfunktion:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

$z = ???$

x = gemessener Wert

\bar{x} = Mittelwert der Meßgröße (=Durchschnittswert)

s = Standardabweichung der Meßgrößen

für Anzahl der Meßgrößen $n \rightarrow \infty$ gilt:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$z = ???$

x = gemessener Wert

μ = Mittelwert der Meßgrößen für $n \rightarrow \infty$

σ = Standardabweichung der Meßgrößen für $n \rightarrow \infty$

Mit Hilfe des Wertes von z kann in den folgenden Tabellen auf dem nächsten Blatt die Wahrscheinlichkeit des Auftretens des Meßwertes abgelesen werden wobei:

$p(z)$ = Wahrscheinlichkeit der Einhaltung des Messwertes

$p(-z)$ = Wahrscheinlichkeit der Unter- und Überschreitung des Messwertes

Das Oszilloskop:

Gerät zur Darstellung von sich zeitlich schnell ändernden Meßsignalen
Dient zur Auswertung von komplexen Signalverläufen, des Phasenverschiebungswinkels zweier Signale, und der Frequenz und Periodendauer eines Signales.

Aufbau: (Braun'sche Röhre)

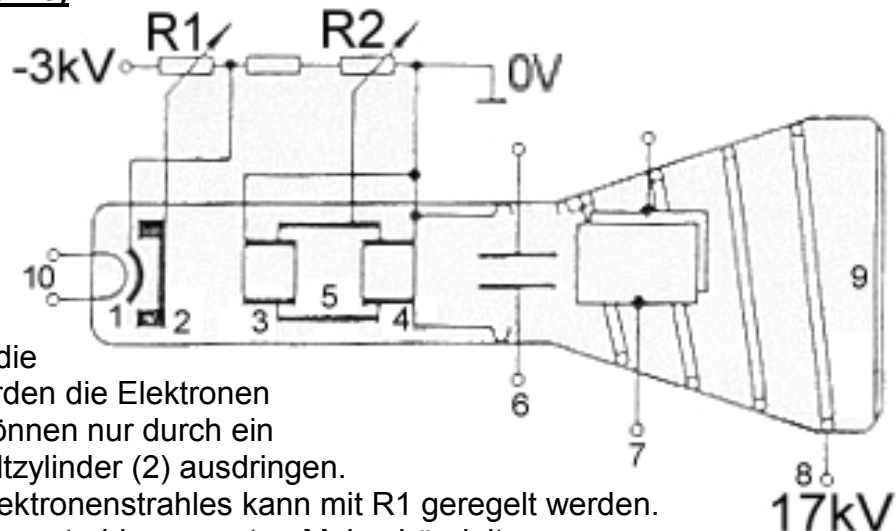
In einem luftleeren Glaskolben befindet sich die Kathode (1), die durch die Heizwendel (10) zum glühen gebracht wird.

Die Anoden (3, 4) sind mehrere kV positiver als die Kathode (1), dadurch werden die Elektronen stark beschleunigt. Sie können nur durch ein winziges Loch im Wehneltzylinder (2) ausdringen.

Die sog. Intensität des Elektronenstrahles kann mit R1 geregelt werden. Dadurch wird der Elektronenstrahl zum ersten Mal gebündelt.

Da die Elektronen alle gleich geladen sind, driften sie auseinander. Diese Drift wird durch den Fokussierzylinder (5), der mehrere hundert Volt negativer als die Anoden ist, unterbunden, da er den Elektronenstrahl nochmals bündelt. Die sog. Fokussierung kann somit mit R2 eingestellt werden.

Nun gelangt der Elektronenstrahl in den Wirkungsbereich der Y-Ablenkplatten (6) und der X-Ablenkplatten (7). Die an der Außenwand angebrachte Nachbeschleunigungselektrode (8) sorgt für eine nochmalige Beschleunigung des Elektronenstrahls, bevor er auf die Leuchtschicht (9) auftrifft und dort die Bewegungsenergie der Elektronen in Lichtenergie umgewandelt wird. Die Leuchtschicht ist leitend beschichtet und auf Anodenpotential gelegt und saugt die Elektronen ab. Somit ist der Stromkreis geschlossen.

**Empfindlichkeit der Röhre:**

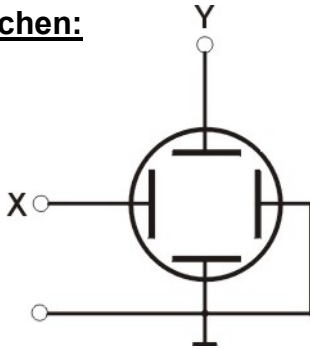
$$E_y = \frac{Y}{U_y}$$

Empfindlichkeit in Y-Richtung

$$E_x = \frac{X}{U_x}$$

Empfindlichkeit in X-Richtung

Technische Wert für die Y-Empfindlichkeit : 0,2 und 2 $\frac{mm}{V}$

Schaltzeichen:**Triggerfrequenz:**

$$f_{\text{trig}} = \frac{1}{n} \cdot f_y \quad T_{\text{trig}} = n \cdot T_y$$

f_{trig} = Frequenz der Triggerung

f_y = Frequenz am Y-Eingang (Messsignal)

n = Ganzzahliger Faktor

T_{trig} = Periodendauer der Triggerung

T_y = Periodendauer des Messsignals

Dämpfung am Messeingang bei Messung in AC-Stellung:

$$x_C = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C_k}$$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{R_E}{\sqrt{x_C^2 + R_E^2}} = \frac{R_E}{\sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C_k}\right)^2 + R_E^2}}$$

$$u_2 = \frac{u_1 \cdot R_E}{\sqrt{x_C^2 + R_E^2}} = \frac{u_1 \cdot R_E}{\sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C_k}\right)^2 + R_E^2}}$$

u_1 = Eingangsspannung

u_2 = Spannung nach dem Eingangs-Hochpaß

R_E = Eingangswiderstand

C_k = Koppelkondensator

x_C = Blindwiderstand von Koppelkondensator

f = Frequenz der Eingangsspannung

Untere Grenzfrequenz (bei Messung in AC-Stellung):

= Grenzfrequenz des Messeingangs (Hochpaß):

$$f_g = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C}$$

$$R = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_g \cdot C}$$

$$C = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot f_g}$$

f_g = Grenzfrequenz = Frequenz bei der die Amplitude auf $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -fachen Wert sinkt

R_E = Eingangswiderstand

C_K = Koppelkondensator

Obere Grenzfrequenz:

= durch Geräteeigenschaften festgelegt.

Bei 50MHz-Oszilloskop \Rightarrow Obere Grenzfrequenz = 50MHz

Anstiegszeit des Oszilloskops:

= Zeit, in der die Anzeige von 10% auf 90% des Endwertes ansteigt.

$$u_2 = u_1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$\Rightarrow t_{10\%} = 0,1 \cdot \tau$$

$$t_{90\%} = 2,3 \cdot \tau$$

$$t_A = t_{90\%} - t_{10\%}$$

$$\Rightarrow t_A = 2,2 \cdot \tau$$

$$\tau = R \cdot C$$

$$f_g = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \tau} \Rightarrow$$

$$f_g = \frac{0,35}{t_A}$$

$$t_A = \frac{0,35}{f_g}$$

t_A = Anstiegszeit des Oszilloskops

f_g = Obere Grenzfrequenz des Oszilloskops

Anstiegszeit der angezeigten Messgröße:

$$t_{aAnz} = \sqrt{t_{aMess}^2 + t_{aOsz}^2}$$

t_{aAnz} = Anstiegszeit der angezeigten Messgröße

t_{aMess} = Anstiegszeit der Messgröße

t_{aOsz} = Anstiegszeit des Oszilloskops

!!! Wichtig !!!:

t_{aMess} muß größer als t_{aOsz} sein, um die Messgröße richtig messen zu können !!!

Ablenkfaktoren:

Zeitablenkfaktor: $T = \alpha \cdot x$

T = Periodendauer

α = Zeitablenkfaktor in Einteilungen pro Zeiteinheit

x = Anzahl der x-Einteilungen

Y-Ablenkfaktor: $u = \beta \cdot y$

U = Spannung

β = Y-Ablenkfaktor in Einteilungen pro Spannungseinheit

y = Anzahl der y-Einteilungen

Strommessung mit dem Oszi:

Der Strom durch ein Bauteil wird durch indirekte Messung ermittelt, indem man einen bekannten Messwiderstand in Reihe zum Bauteil schaltet und den Spannungsabfall am Messwiderstand mißt. Diese Spannung ist nach dem Ohm'schen Gesetz direkt proportional zum Strom.

$$i(t) = \frac{u(t)}{R_M} \Rightarrow i = \frac{x \cdot \beta}{R_M}$$

i(t) = Strom in Abhängigkeit der Zeit t

u(t) = Spannung in Abhängigkeit der Zeit t

i = Strom durch Messwiderstand

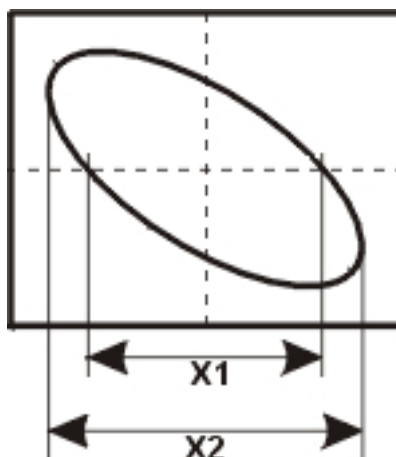
x = Anzahl der Einteilungen

β = Ablenkungsfaktor in Einteilungen pro Spannungseinheit

R_M = Messwiderstand

Phasenverschiebungswinkel von Signalen bei X-Y-Betrieb:

$$\sin|\alpha| = \frac{x_1}{x_2}$$



$|\alpha|$ = Betrag des Phasenverschiebungswinkel

x_1 = Länge der Strecke zwischen den Schnittpunkten der Lissajous-Figur mit der x-Achse

x_2 = Länge der Strecke zwischen den Maximalpunkten in X-Richtung

Kondensatorladezeit / Ladekonstante:

1τ entspricht der Zeit, in der sich ein Kondensator auf 63 % seiner Endladung auflädt.
In der Zeit von 5τ ist der Kondensator zu 100% geladen.

$$\tau = R \cdot C$$

$$R = \frac{\tau}{C}$$

$$C = \frac{\tau}{R}$$

R = Widerstand in Ω

C = Kapazität in F

τ = Ladekonstante in s

Übertragungsfaktor:

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\text{Ausgang}}{\text{Eingang}}$$

bei $f_s = f_g$ gilt:

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$$

f_s = Frequenz des Eingangssignals

f_g = Grenzfrequenz

u_2 = Ausgangsspannung

u_1 = Eingangsspannung
